

### 第3回 濾過のRuth式

#### 1. 対象とするプロセス：デッドエンド濾過

濾過操作は圧力差により濾材または濾過膜を通して、粒子懸濁液から清澄な濾液を得る簡単な操作である。濾過の進行により膜面にケーキ層が堆積し、それに応じて濾過速度が低下することが特徴である。

#### 2. モデル式の作成

濾過の過程を単純明快にモデル化したのがRuthの濾過方程式である<sup>1)</sup>。圧力一定の全量濾過（デッドエンド濾過）を考える（図1）。この操作で濾液の積算量 $V$ の2乗を時間 $t$ に対してプロットするとほぼ直線が得られる（図2の①）。しかし濾過初期の $t=0$ の近くではこの線が曲がっている。Ruthはこの点に着目し、 $V$ と $t$ のデータを各々 $V_0$ と $t_0$ という適当な定数で補正すれば次式：

$$(V + V_0)^2 = K(t + t_0) \quad (1)$$

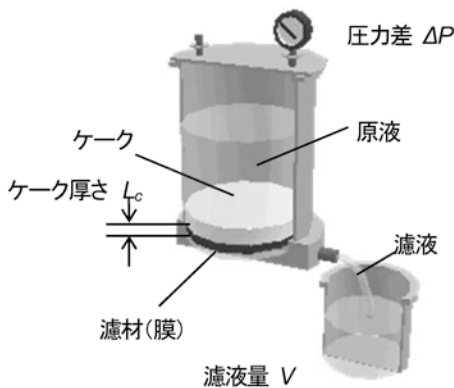


図1 デッドエンド濾過

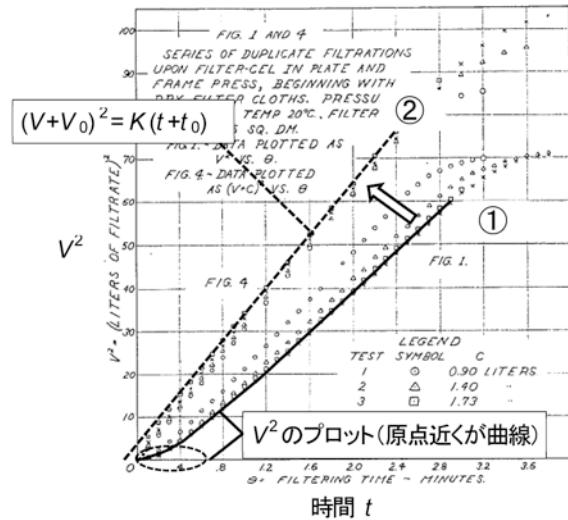


図2 Ruthの原報<sup>1)</sup>の図

のように簡単な直線関係となることを見いだした（図2の②）。この式は数学的には微分方程式：

$$J_v A = \frac{dV}{dt} = \frac{K}{2(V + V_0)} \quad (t_0 = V_0^2/K) \quad (2)$$

の解になっている。 $(J_v [m^3/(m^2 \cdot s)])$ ：透過流速、 $A [m^2]$ ：膜面積 これらの式をRuthの濾過方程式と呼ぶ。デッドエンド濾過において、 $K$ と $V_0$ という2つの定数（濾過定数）がわかれば、濾過曲線( $V$  vs.  $t$ )を予測することができる。

#### 【例題6】Ruth式のパラメータ推定 <cem06.xls>

式(1)を変形して、

$$V = \sqrt{Kt + V_0^2} - V_0 \quad (3)$$

である。図3中のセルA4：B16にデッドエンド形式の濾過実験データを示す。データは時間 $t$ に対する濾液量 $V$ である。Ruthの濾過方程式(3)にあてはめてパラメータを求めよ。

(解) 非線形最小2乗法の問題である。パラメータ $K$ 、 $V_0$ の初期値をC1：C2に書き、C4：C16に式(3)の値を計算する。データと計算値の残差2乗和をセルD17とする。ソルバーで目的セルをD17、目標値を最小値、変化させるセルをC1：C2として実行する。濾過定数として $K = 0.00041 \text{ m}^6/\text{h}$ 、 $V_0 = 0.000392 \text{ m}^3$ が得られた。



Akira ITO (正会員)  
 1982年 東京工業大学大学院理工学研究科化学工学専攻博士課程修了  
 現在 東京工業大学理工学研究科化学工学専攻 教授  
 連絡先：〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1-S1-3  
 E-mail aito@chemeng.titech.ac.jp

2014年00月00日受理

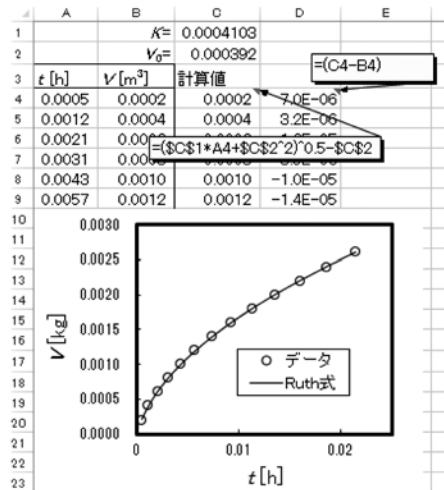


図3 Ruth式のパラメータ推定<cem06.xls>

Ruth式における濾過定数は、 $K$  [m<sup>6</sup>/s] がケーキの濾過抵抗を、 $V_0$  [m<sup>3</sup>] は濾材の抵抗相当の仮想ケーキ層を形成する濾液量の意味を持つ。つまり濾過の以前にある濾材(膜)の抵抗を、後からできるケーキ層の抵抗を使って表していることになり、この発想の転換がRuth式のモデル上の特徴となる。

濾液量  $V$  とケーキ厚さは比例関係にあり、この仮想ケーキ厚さを  $L_m$ 、実際のケーキ厚さを  $L_c$  として、次式の関係にある。

$$L_m = V_0 C / A \quad (4)$$

$$L_c = V C / A \quad (5)$$

(原液の粒子濃度をケーキ体積基準で  $C$  [m<sup>3</sup>-ケーキ/m<sup>3</sup>-濾液] とする。) するとRuth式は  $L_c$  基準で次式のようにも表せる。(  $k$  : 比例定数,  $\mu$  : 水の粘度)

$$\frac{dL_c}{dt} = \frac{C}{A} \frac{dV}{dt} = J_v C = \left( \frac{k \Delta P C}{\mu} \right) \frac{1}{L_c + L_m} \quad (6)$$

### 3. Ruth式の展開

前項のデッドエンド濾過に関するRuthの濾過方程式を展開し、クロスフロー濾過のモデルを考える。

クロスフロー濾過では膜面流速  $u$  による膜面せん断力によりケーキが剥離する効果が生じる(図4)。これをケーキ剥離速度(リフト速度)  $J^* C$  で表すと、ケーキ層厚さがRuth式にこの項を加えて次式となる。

$$\frac{dL_c}{dt} = J_v C - J^* C = \left( \frac{k \Delta P C}{\mu} \right) \left( \frac{1}{L_c + L_m} \right) - J^* C \quad (7)$$

右辺第1項がデッドエンドのRuth式と同じ項で、第2項がクロスフローの効果を表す。なお、ここで濾過流束の初期

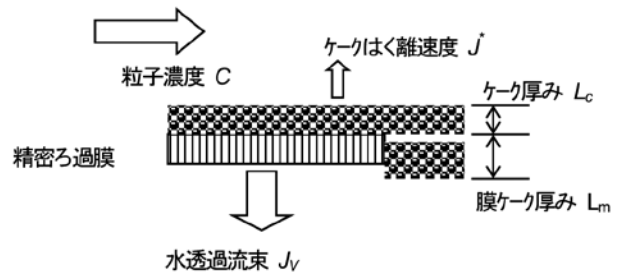


図4 リフト速度  $J^*$  によるクロスフロー濾過のモデル

値は  $J_{v0} = k \Delta P / (\mu L_m)$  である。

このリフト速度モデルによると、透過流束の定常値  $J_{v\infty}$  は  $J_{v\infty} C = J^* C$  となり、 $J_{v\infty}$  は圧力によらないことになる。すなわち、精密濾過における限界透過流束を表している。また、リフト速度は粒子層表面のせん断力に依存するので、膜面流速  $u$  が大きいとリフト速度も大きく、従って透過流束も大きくなると予測される。

#### 【例題7】クロスフロー濾過のモデル<cem07.xls>

細孔径0.2  $\mu$ mの精密濾過膜を用いて膜面積60 cm<sup>2</sup>の平膜セルで野菜ジュースのクロスフロー濾過をおこなった。透過流束の経時変化が図6のようであった。濾過圧力  $\Delta P = 0.10$  MPa, 純水の透過流束  $J_{v0} = 540$  kg/(m<sup>2</sup> · h) = 1.5 ×

A	B	C	D	E	F	G
1	微分方程式数	1			定数	
2	t=	Lc=	=(G8*G5*G4/G6)/(		Jv0=	1.50E-04
3	1440.00	2.284E-06	(B3+G7)-G3*G4		Jv∞=J*=	3.19E-06
4		Lc'=			Cb=	0.02
5	微分方程式	4.68E-10			ΔP=	1.00E+05
6					μ=	1.00E-03
7	積分区間t=[a,	0			Lm=	5.00E-07
8	b],	1440	Runge-Kutta		k=	7.5E-19
9	積分刻み幅Δ	10				=(G7*G2*G6/G5
10	計算結果					
11	t [s]	Lc[m]		Jv	kg/m2h	h
12	0	0.00E+00		1.5E-04	540	0.000
13	10	6.12E-06		1.1E-05	40.76057	0.003
14	20	7.53E-06		9.3E-06	33.62237	0.006
15	30	8.64E-06		8.2E-06	29.54585	0.008
16	40	9.56E-06		7.5E-06	26.83368	0.011
17	50	1.04E-05		6.9E-06	24.86761	0.014

図5 クロスフロー濾過のリフト速度モデル<cem07.xls>

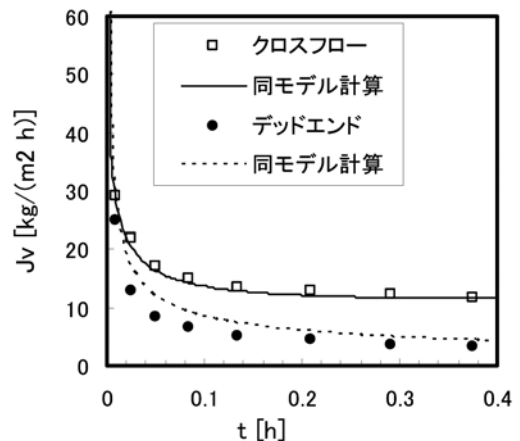


図6 クロスフロー濾過の透過流束

$10^{-4} \text{ m}^3/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ , 定常透過流束  $J_{v,\infty} = 11.5 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{h}) = 3.19 \times 10^{-6} \text{ m}^3/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ ,  $C = 0.02 \text{ m}^3/\text{m}^3$ である。

(解) 図5のシートでG列にパラメータ, B5に微分方程式を書く。パラメータのうち  $L_m$  を仮定して積分を実行する。 $L_m = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$ ではほぼデータと一致した。得られた  $L_c$  の経時変化を式(6)で  $J_v$  に換算して図6に示す。クロスフロー濾過ではケーキ剥離速度の効果で, 透過流束が一定値になる。なお, 比較したデッドエンド濾過では時間とともに透過流束が減少し, 最終的に零に近づく。ともに簡単な微分方程式で濾過の過程が表せている。

原典

1) Ruth, B.F., G.H. Montillon and R.R. Montonna: *Ind. Eng. Chem.*, 25, 76 and 153 (1933)

## 化学工学トリビア

### Overall heat transfer coefficient?

伝熱工学におけるこの用語の日本語訳は3系統ある。

①「熱通過率」, ②「総括熱伝達係数」, ③「総括伝熱係数」「熱伝達」とは Convective heat transfer の機械工学での訳語であり, Heat transfer coefficient を「熱伝達率」とする。さらに「総括 Overall」については機械工学ではなぜか「熱通過率」という別の訳語を使う。このためもあり, 機械工学分野では似た語である「熱伝達(対流)」と「熱伝導」の区別がついていない学生が続出する。

もちろん化学工学では Heat transfer coefficient が「(対流) 伝熱係数」, Overall heat transfer coefficient が「総括伝熱係数」と一貫している。

化学工学では普通に「伝熱係数」を使っていればよいところだが, しかし残念ながら, 化学工学でも機械工学の「熱伝達率」に妥協した(?)「熱伝達係数」派が多くなっている。この延長で Overall heat transfer coefficient に「熱通過率」はさすがになかろうということ(?)で機械工学にはない「総括熱伝達係数」を造語して使うことにもなる。

実は化学工学便覧も1978年の4版までは「伝熱係数」だが, 5版(1988年)で「熱伝達係数」になって以来, 最新の7版まで「熱伝達係数」である。また, ネット上の google で各語句を検索すると, 「熱伝達率」34万件, 「伝熱係数」15万件, 「熱伝達係数」137万件(!)と, もう大勢は「熱伝達係数」に決しているかのようである。

筆者は科内の卒論発表などで「熱伝達係数」が出るたびにクレームをつける頑固教員であるが, 残念ながら孤軍奮闘である。それでも化学工学科が消滅しようとしている現在, 化学工学の砦として言い続けたい。「Overall heat transfer coefficient は総括伝熱係数です!」(この件反論歓迎)